数理解析研究所講究録
940巻 1996年 7-11

ある種の minimal flow の特徴ずけについて

神大発達科学部　江川治朗 (Jirō Egawa)

X を距離 d_X を持つ距離空間とする。Z, Q, R, C をそれぞれ整数の全体，有理数の全体，実数の全体，複素数の全体とする。連続写像 $\pi : X \times R \to X$ が次の条件 (1), (2) を満たすとき，π を相空間 X 上の flow という：

(1)　$\pi(x, 0) = x$　$(x \in X)$

(2)　$\pi(\pi(x,t), s) = \pi(x, t+s)$　$(x \in X, t, s \in R)$

$A \subset X$, $B \subset R$ に対して，集合 $\{\pi(x,t);\ x \in A, t \in B\}$ を $\pi(A, B)$ とかく。$A \subset X$ の閉包を $\overline{A}$ と記す。又 $x \in X$ を通る軌道を $O_\pi(x)$ とかく，即ち $O_\pi(x) = \pi(x, R)$。$M \subset X$ が任意の $x \in M$ に対して $O_\pi(x) \subset M$ が成り立つとき，M は π の不変集合という。π の不変集合 M への制限を $\pi|M$ とかく。π の空でないコンパクトな不変集合 M が任意の $x \in M$ に対して $\overline{O_\pi(x)} = M$ が成り立つとき，M を π の minimal set という。X 自身が minimal set のとき，π を X 上の minimal flow と

いう。任意の$\varepsilon>0$に対して$\delta>0$が存在して，$d_X(x,y)<\delta$かつ$t\in R$ならば$d_X(\pi(x,t),\pi(y,t))<\varepsilon$が成り立つとき，$\pi$をequicontinuous flowという。

πをX上のminimal flowとする。任意の$\varepsilon>0$に対して$\alpha>0$が存在して，$d_X(x,\pi(x,n\alpha))<\varepsilon\ (n\in Z)$が成り立つとき，$x\in X$をregularly almost periodic pointという。regularly almost periodic pointの全体を$R(\pi)$とかく。$R(\pi)\neq\phi$のとき，πはregularly almost periodicという。$R(\pi)=X$のとき，πはpointwise regularly almost periodicという。$\pi(x,\tau_n)\to y$となる数列$\{\tau_n\}\subset R$に対して，$\pi(y,-\tau_n)\to x$となるとき，$x\in X$をalmost automorphic pointという。almost automorphic pointの全体を$A(\pi)$とかく。$A(\pi)\neq\phi$のとき，πはalmost automorphicであるという。$R(\pi)$，$A(\pi)$はπの不変集合であることは容易にわかる。$\lambda\in R$に対して，$\chi_\lambda(\pi(x,t))=\chi_\lambda(x)e^{i\lambda t}$をみたす連続関数$\chi_\lambda: X\to K=\{z\in C;\ |z|=1\}$が存在するとき，$\lambda$を$\pi$の固有値という。このとき，$\chi_\lambda$を$\lambda$に属する固有関数という。$\pi$の固有値の全体を$\Lambda(\pi)$とかく。このとき，$\Lambda(\pi)$は$R$の可算部分加群である。

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in R$が

$r_1\alpha_1+r_2\alpha_2+\cdots+r_n\alpha_n=0\ (r_i\in Q)\Rightarrow r_1=r_2=\cdots=r_n=0$

が成り立つとき，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ は rationally independent という。R の可算部分集合 A が

(1) n 個の rationally independent な A の要素 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ を持ち，

(2) 任意の $a \in A$ に対して，

$$a = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + \cdots + r_n\alpha_n \quad (r_i \in Q)$$

とあらわせるとき，

A の次元は n といい，$\dim A = n$ とかく。

[2] で regularly almost periodic minimal flow が discrete flow に対して議論されているが，この報告では，それを continuous flow に対して考察し，次の定理を得た。証明については [1] を見ていただきたい。

定理1　π をコンパクト距離空間 X 上の minimal flow とする。このとき，π が regularly almost periodic であるための必要十分条件は，π が almost automorphic で $\dim \Lambda(\pi) = 1$ となることである。

定理2　π をコンパクト距離空間 X 上の minimal flow とする。このとき，π が pointwise regularly almost periodic であるための必要十分条件は，π が equicontinuous

で $\dim \Lambda(\pi)=1$ となることである。

$C(R,C)$ を複素数値連続関数の全体に compact-open topology を入れた空間とする。このとき，よく知られているように $C(R,C)$ は距離空間となる。$C(R,C)$ 上の flow η を $\eta(f,t)=f_t$ $(f\in C(R,C),\ t\in R)$ で定義する。但し，$f_t(s)=f(t+s)$ $(s\in R)$。$f\in C(R,C)$ に対して，$H(f)=\overline{O_\eta(f)}=\overline{\{f_t\}}_{t\in R}$ と定義し，$\eta_f=\eta|H(f)$ とおく。このとき，f が η_f の almost automorphic point であるとは，f が Bochner の almost automorphic function であり，η_f が equicontinuous とは f が almost periodic function であることが対応する。更に，f が almost automorphic function のとき，$\Lambda(\eta_f)=\{\lambda_n\}$ とする。このとき，ある $\{a_k^n\}\subset C$ をとると，

$$f_n(t)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k^n e^{i\lambda_k t}$$

が f に広義一様収束するようにできることが知られている。勿論 f が almost periodic function のとき，上記の列が一様に f に収束するようにできる。

参考文献

[1] J. Egawa, A characterization of regularly

almost periodic minimal flows, Proc. Japan Acad. Vol. 71 (1995), 225-228.

[2] W. H. Gottschalk and G. A. Hedlund, Topological dynamics, Amer. Math. Soc. Colloquium publication Vol. 36, 1955.